

tistics Statistique
ada Canada

Ottawa

SIMULATION DE LA FECONDITE AU MOYEN D'UN MODELE BASE SUR LA COURBE DU TYPE I DE PEARSON

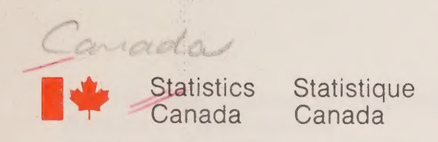
by

S. Mitra and A. Romaniuk



RINTED PUBLICATION No. 26

ed from: The Canadian Journal of Statistics, 1(2) 1973, 211-230

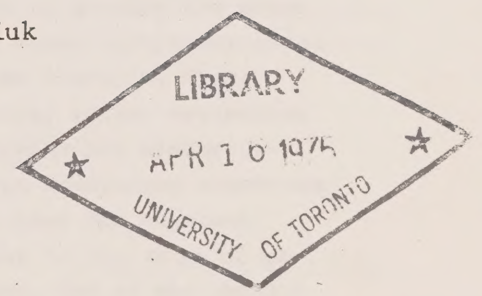


Ottawa

SIMULATION DE LA FECONDITE AU MOYEN D'UN MODELE BASE SUR LA COURBE DU TYPE I DE PEARSON

by

S. Mitra and A. Romaniuk



REPRINTED PUBLICATION No. 26

Reprinted from: The Canadian Journal of Statistics, 1(2) 1973, 211-230

The Canadian Journal of Statistics
Section C: Applications
Vol.1, No.2, 1973, pp. 211-229

La Revue Canadienne de Statistique
Section C: Applications

SIMULATION DE LA FÉCONDITÉ AU MOYEN D'UN MODÈLE BASÉ SUR LA COURBE DU TYPE I DE PEARSON

par

S. MITRA

Emory University

et

A. ROMANIUK

Université de Montréal et Statistique Canada

Key Words and Phrases: *Age-specific fertility rates, simulation, Pearson type I curve, estimation, fertility parameters, birth projections, model building, Canadian data.*

ABSTRACT

There have been various attempts to use the Pearson type I curve for the purpose of graduating age-specific fertility rates for human populations. This article attempts to broaden the scope of application of this curve, and discusses three particular areas where such application of this curve would be feasible. These areas are: simulation of age-specific fertility rates; estimation of certain fertility parameters where statistics are either unreliable or incomplete as is the case in most developing countries; and projections of births. The writers feel that the greatest potential of the Pearsonian type I curve lies in the area of parametric model building for birth projections. One of the important prerequisites for a fruitful application in this area is simplification of procedures and reduction of a number of parameters needed to derive the Pearsonian type I curve. This article presents new methods for deriving this latter curve. The results of the proposed models are tested against data on age-specific fer-

tility rates for Canada.

1. INTRODUCTION

Les essais en vue de simuler ou d'ajuster les courbes de fécondité à l'aide d'une fonction mathématique sont nombreux. La fonction de Gompertz pour reproduire la fécondité cumulée par âge (Wunsch-1966, Martin-1967, Romaniuk et Tanny -1969, Murphy et Nagnur -1972 et Stone-1973) et la fonction du type I de Pearson, pour reproduire les taux spécifiques de fécondité par âge (Wicksell-1931, Mitra-1967), sont parmi les plus connues. D'autres fonctions furent aussi appliquées: (Mazur-1963, Tekse-1967, Avery -1970).

Cependant, la valeur pratique de ces fonctions est, dans la plupart des cas, limitée. C'est le cas notamment lorsqu'elles font appel à des paramètres trop nombreux pour se prêter à une manipulation facile ou bien encore à des paramètres de nature essentiellement mathématique dont l'interprétation est difficile. Déjà la courbe du type I de Pearson, dans sa formulation par Elderton (1930), exige la connaissance des quatre premiers moments de la distribution de fréquences.

Un modèle, pour qu'il soit d'une réelle utilité dans l'analyse et la projection de la fécondité, doit non seulement posséder les propriétés mathématiques qui le rendent apte à reproduire avec une fidélité suffisante la courbe de la fécondité, mais encore faut-il que les paramètres fondamentaux du modèle soient susceptibles d'une interprétation démographique.

2. LA FONCTION DU TYPE I DE PEARSON ET LA DÉRIVATION DES PARAMÈTRES

Avec l'origine à l'âge modal, l'équation de la courbe du type I de Pearson est:

$$(1) \qquad y_x = y_0(1 + x/a_1)^{m_1} (1 - x/a_2)^{m_2}$$

où y est le taux de fécondité à l'âge x; y_0 la valeur modale de la fécondité; m_1 et m_2 déterminent l'allure de la courbe et a_1 et a_2 la période de reproduction ou l'intervalle d'âge de la

fécondité. En outre:

(2) $$-a_1 \leq x \leq a_2 \,, \qquad m_1/a_1 = m_2/a_2 \,.$$

Ordinairement, les paramètres de la distribution de type I peuvent être obtenus par la mise en équation des quatre premiers moments de la distribution observée avec les paramètres (voir Elderton, 1930) qui peuvent être directement tirés de l'équation *(1)*. En fixant la période de reproduction entre les âges 15 et 50 ans, il est possible de réduire à deux le nombre de moments requis pour calculer les paramètres de l'équation *(1)*.

En effect, en fixant:

(3) $$a_1 + a_2 = 35$$

dans l'équation *(2)*, et l'âge initial de procréation à 15 ans, on arrive aux équations suivantes:

(4) $$\text{Moyenne} = \mu_1' = \{(a_1 + a_2)(m_1 + 1)\}/(m_1 + m_2 + 2),$$

(5) $$\mu_2' = \{(a_1+a_2)^2(m_1+1)(m_1+2)\}/\{(m_1+m_2+2)(m_1+m_2+3)\} \,,$$

de sorte que la variance

(6) $$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = \{(a_1+a_2)^2(m_1+1)(m_2+1)\}/\ \{(m_1+m_2+2)^2(m_1+m_2+3)\} \,.$$

En outre, on peut montrer que

(7) $$m_1 + m_2 = \{\mu_1'(a_1+a_2-\mu_1')/\mu_2\} - 3$$

et

(8) $$m_1 = \{(m_1+m_2+ 2\mu_1')/(a_1+a_2)\} -1 \,,$$

lorsque

(9) $$m_2 = (m_1+m_2) - m_1 \,.$$

Les paramètres, m_1 et m_2 peuvent être dérivés à partir des équations *(7)*,*(8)* et *(9)*, en utilisant l'équation *(3)*. En outre, l' équation *(2)* peut encore s'écrire:

(10) $(m_1 + m_2)/(a_1 + a_2) = (m_1 + m_2)/35$

alors que

(11) $a_1 = 35/(m_1 + m_2)$

et

(12) $a_2 = 35 - a_1$

quant à y_0, l'équation suivante

(13) $y_0 = [N/\{(a_1+a_2)\ B(m_1+1,m_2+1)\}][m_1^{m_1}\ m_2^{m_2}/(m_1+m_2)^{m_1+m_2}]$,

peut être utilisée lorsque N est égal à la somme des taux de fécondité par âge et lorsque B représente la fonction bêta. De fait, y_0 dans l'équation *(1)* peut être considéré comme un multiplicateur qui égalise la somme des distributions observées et des distributions dérivées.

Lorsque les limites de la période de reproduction sont fixées d'avance, de 15 à 50 ans par exemple, il y a moyen de réduire davantage le nombre des moments utilisés. Par un procédé de mise en équation, analogue à celui utilisé dans le cas précédent, on peut se servir du premier moment, c'est-à-dire de l'âge moyen et d'une autre mesure, l'âge modal, par exemple. Dans ce cas, l'âge modal (a_1) étant donné et l'origine étant située au début de la courbe, les paramètres restants peuvent être calculés à partir des équations ci-dessous:

(14) $a_2 = (a_1 + a_2) - a_1$

(15) $m_2 = a_2(a_1+a_2-2u_1')/\{(a_1+a_2)(u_1'-a_1)\}$

et

(16) $m_1 = a_1 m_2/a_2$.

Nous allons désormais identifier nos trois procédés pour calculer les constantes de l'équation exprimant la courbe type I de Pearson par les indices suivants:

(4M) Méthode fondée sur les quatre premiers moments

(2M) Méthode fondée sur les deux premiers moments

(1M) Méthode fondée sur la moyenne et le mode.

Les chiffres 4,2 et 1 représentent le nombre des moments sur lesquels la méthode est fondée.

3. TEST DU MODÈLE

Les trois procédés décrits dans la section précédente seront testés empiriquement en comparant les taux spécifiques de fécondité dérivés à l'aide du modèle aux taux spécifiques observés au Canada. Il convient de remarquer que la fécondité au Canada a subi des changements considérables dans le temps, tant du point de vue de l'intensité, c'est-à-dire de son niveau, que du point de vue du calendrier, c'est-à-dire sa distribution par âge. C'est ainsi que l'indice synthétique de fécondité est passé de 2.6 en 1936 à 3.9 en 1959 pour retomber ensuite à 2.4 naissances par femme en 1969. En ce qui concerne le calendrier des naissances, il a subi au cours du temps un rajeunissement considérable. L'âge moyen des femmes à la naissance de leurs enfants est passé de 30.1 ans en 1926 à 27.3 en 1969. L'âge modal a suivi la même tendance à la baisse: de 28.0 il passe à 23.8, respectivement pour les deux années indiquées. Les données canadiennes nous permettent donc de tester le modèle dans des conditions assez variées.

Les données utilisées sont celles de la période allant de 1926, époque à laquelle les statistiques sur les naissances au Canada commencent à être publiées, jusqu'en 1969, dernière année pour laquelle les données étaient disponibles au moment du test. Par souci d'économie d'espace, on a dû se limiter aux années suivantes: 1926, 1931, 1941, 1951, 1961 et 1969. On peut considérer ces années comme étant représentatives de l'ensemble de la période étudiée. Pour tester les résultats du modèle, on procédera en deux étapes. D'abord, on comparera les taux dérivés avec les taux observés, par âge individuel; ensuite, on calculera un indice de déviation qui permettra d'évaluer la performance du modèle d'une manière générale.

Rappelons que nous avons trois procédés de calcul des paramètres à tester. Puisque les procédés *(2M)* et *(1M)* impliquent une durée fixe de la période de procréation, il a été jugé opportun de tester le modèle en tenant compte de deux hypothèses quant

à la durée de procréation: de 15 à 50 ans et de 17 à 50 ans. Nous avons donc au total cinq séries de taux dérivés à comparer aux taux observés.

Les taux observés et les taux dérivés sont comparés dans les tableaux en annexe. Nous avons aussi reproduit sur un graphique les écarts absolus entre les taux dérivés et les taux observés. Les écarts absolus ont été préférés aux rapports relatifs pour faire ressortir davantage le biais qui affecte les taux aux âges de fécondité maximum. En effect, un pourcentage donné d'écart n'a pas la même importance pour les âges à faible fécondité que pour les âges à forte fécondité. Faute d'espace, seuls les écarts entre les taux observés et les taux dérivés par la méthode *(4M)* ont été reproduits. En fait, le biais résultant de l'application des autres procédés, s'il diffère en ampleur, n'en est pas moins similaire à celui mis en relief par le graphique. L'examen de ce graphique fait apparaître en effect l'existence d'un biais associé à l'âge. Tous les procédés surestiment les taux de fécondité aux âges féconds jeunes, les sous-estiment entre 20 et 25 ans et les surestiment, quoique légèrement entre 25 et 30 ans; ensuite les écarts, tout en variant, s'atténuent avec l'âge.

Parfois, on est intéressé davantage à connaître l'erreur totale plutôt que les erreurs différentielles par âge. Il existe différentes façons de calculer l'écart entre la fréquence attendue et la fréquence observée. A cet effet, nous avons eu recours à un indice dit l'indice d'hétérogénéité *(Δ)*, et qui se calcule en ramenant à des pourcentages les deux distributions de fréquences et en ne faisant la somme que des écarts positifs entre pourcentages correspondants. Une valeur donnée de cet indice indique le pourcentage d'observations à répartir entre les intervalles d'âge de sorte que les deux distributions deviennent indentiques. Les valeurs de cet indice sont résumées dans le tableau 1.

TABLEAU 1

L'indice d'hétérogénéité *(Δ)* en tant que mesure de l'erreur totale affectant les taux de fécondité, dérivés par les procédés *(4M)*, *(2M)* et *(1M)*, Canada.

Année	*(4M)*	*(2M)*		*(1M)*	
		15-20	17-20	15-20	17-20
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1926	2.74	4.08	2.77	8.94	2.80

1931	2.66	3.78	2.59	7.15	2.27
1941	2.32	4.30	2.39	5.33	4.51
1951	2.28	4.03	2.41	9.42	2.41
1961	2.97	5.38	3.30	11.34	4.03
1969	3.48	5.23	3.99	10.39	4.13

D'après cet indice, l'écart est à son niveau le plus élevé pour les années où l'indice synthétique de fécondité atteint son maximum et son minimum soit 1961 et 1969, respectivement. De ces deux années, les valeurs-indices tirés de la méthode *(4M)* sont plus élevés pour 1969, et ceux de *(2M)* un peu plus élevés pour 1961. Comme on pouvait le prévoir, les indices sont toujours les plus faibles lorsque la méthode *(4M)* est employée; toutefois, si l'on songe à la simplicité et à la logique des autres méthodes, les valeurs ne sont pas très élevées, et en général le modèle semble parfaitement satisfaisant, du moins comme première approximation de la formule d'ajustement des taux de fécondité.

4. POTENTIALITÉ DU MODÈLE

La réduction des paramètres de la fécondité à trois seulement - indice synthétique, âge moyen et âge modal - présente des avantages opérationnels et analytiques considérables tout en élargissant le champ d'application du modèle. On peut retenir trois domaines particuliers dans lesquels le modèle peut rendre un réel service au démographe.

D'abord il y a le domaine de la simulation proprement dite. Avec les moyens de calcul électroniques dont on dispose actuellement, on est tout naturellement tenté de reproduire les courbes de fécondité des populations humaines en les mettant en rapport avec différents facteurs qui déterminent leur forme. Par exemple, on peut étudier les différentes courbes de fécondité qui résulteraient d'une modification du *calendrier* (distribution par âge), en manipulant l'âge moyen et l'âge modal. On peut voir ce qui arrive à la courbe de fécondité en modifiant successivement, selon un plan établi d'avance, les paramètres d'*intensité*(niveau) d'une part et les paramètres du *calendrier*, c'est-à-dire de la distribution par âge, d'autre part. En faisant par ailleurs appel

à une mesure d'espacement des naissances, on pourrait éventuellement étudier, à l'aide de la simulation, la relation complexe entre l'*intensité* et le *calendrier* de la fécondité. Le modèle peut aussi permettre la simulation des courbes de fécondité par ordre ou rang de naissance.

On peut également utiliser ce modèle pour tester la cohérence des données existantes et estimer les paramètres de fécondité. On sait que les données sur la fécondité dans les pays en voie de développement sont souvent déficientes ou incomplètes. Or, à l'aide de ce modèle, on peut tester la validité des données existantes ou reconstruire la courbe de fécondité à partir de données incomplètes mais fiables. En voici un exemple. Pour certaines populations on connaît la descendance finale, c'est-à-dire le nombre d'enfants par femme ayant dépassé l'âge de la ménopause, mais on ignore l'âge des mères à la naissance de leurs enfants et, par conséquent, on ne peut pas calculer directement les taux de fécondité par âge. On peut néanmoins y parvenir en recourant au modèle. On assimilera la descendance finale à l'indice synthétique de fécondité, dont on a besoin pour pouvoir se servir du modèle. Il convient de noter en passant que dans les conditions d'une fécondité relativement stable (le cas des pays en voie de développement), les deux mesures de fécondité peuvent être considérées à toute fin pratique comme étant identiques. En ce qui concerne les deux paramètres de la distribution - âge moyen et âge modal - ils peuvent être estimés indirectement au moyen de quelques données supplémentaires. Par exemple, il a été démontré empiriquement (Mitra, 1967) que l'âge modal est approximativement égal à $22+p$, où p est un paramètre de nuptialité.

$$p = (1/5)[\{m_{(25-29)} - m_{(20-24)}\}/m_{(20-24)}]100 \qquad (17)$$

où $m_{(20-24)}$ et $m_{(25-29)}$, sont les proportions des femmes mariées dans les groupes d'âge 20-24 et 25-29 respectivement. Quant à l'âge moyen, il a été établi empiriquement qu'étant donné la forme particulière de la courbe de fécondité, pour de nombreuses populations il excède l'âge modal d'environ 2.5 ans. Une autre façon de résoudre le problème consisterait à emprunter les valeurs relatives à l'âge moyen et l'âge modal à une autre population

pour laquelle ces valeurs sont connues et dont les comportements procréateurs sont similaires à ceux de la population dont on cherche à estimer les taux de fécondité.

Mais c'est surtout dans le domaine des projections de population, qu'à notre avis, le modèle peut rendre des services appréciables (Romaniuk, 1973). Pour calculer les naissances nécessaires pour les projections de population, selon la méthode de composantes, il faut au préalable projeter les taux spécifiques de fécondité par âge. Or, lorsqu'on cherche à projecter la population par année d'âge, il faut des taux pour les 35 âges individuels (15-50 ans). Avec le modèle, au lieu d'analyser et projeter tous ces taux, on a l'avantage de manipuler seulement trois paramètres de fécondité - indice synthétique (fécondité totale), âge moyen et âge modal. Les taux de fécondité par âge sont obtenus automatiquement par le modèle. La réduction de la distribution de la fécondité à trois paramètres seulement présente donc un avantage opérationnel incontestable. Mais il y a là des avantages analytiques également; en effet, les trois paramètres de fécondité, incorporés dans le modèle, se prêtent à une analyse en profondeur, qu'il est impossible de mener lorsque la fécondité est définie en termes de taux de fécondité par âge.

Afin de vérifier si le modèle peut effectivement être employé avec succès dans les projections de naissances, on a procédé à un essai portant sur les données du Canada. À cette fin, on a utilisé les trois procédés de calcul des paramètres de la fonction *(1)*, décrits dans la première section. On a ensuite fait calculer les taux de fécondité par âge qu'on a appliqués aux femmes en âge de procréation pour dériver le nombre annuel des naissances. Les rapports entre le nombre des naissances ainsi obtenu et le nombre des naissances réelles pour les années indiquées sont présentés dans le tableau 2. On constate que, dans l'ensemble, les chiffres réels et les chiffres estimés correspondent de très près. Les écarts sont en effect négligeables. Il est vrai que cette concordance n'est atteinte qu'au niveau d'ensemble, en partie grâce à la compensation des erreurs dont sont entachées les naissances aux âges individuels. Toutefois, si l'on considère que les données nécessaires pour effectuer des projections démographiques ne sont pas les naissances selon l'âge de la mère, mais le nombre total de naissances, notre modèle donne des résul-

tats quasiment parfaits.

TABLEAU 2

Rapports entre le nombre estimé par les procédés *(4M)*, *(2M)* et *(1M)* et le nombre réel de naissances, Canada

	4M	*2M*		*1M*	
Année		15-50	17-50	15-50	17-50
1926	1.001	0.986	0.999	1.005	1.000
1931	1.001	1.001	1.000	1.010	0.998
1941	0.998	0.997	0.998	1.000	0.996
1951	0.998	0.997	0.997	0.984	0.996
1961	1.003	1.005	1.001	1.013	1.002
1969	1.008	1.006	1.011	1.018	1.009

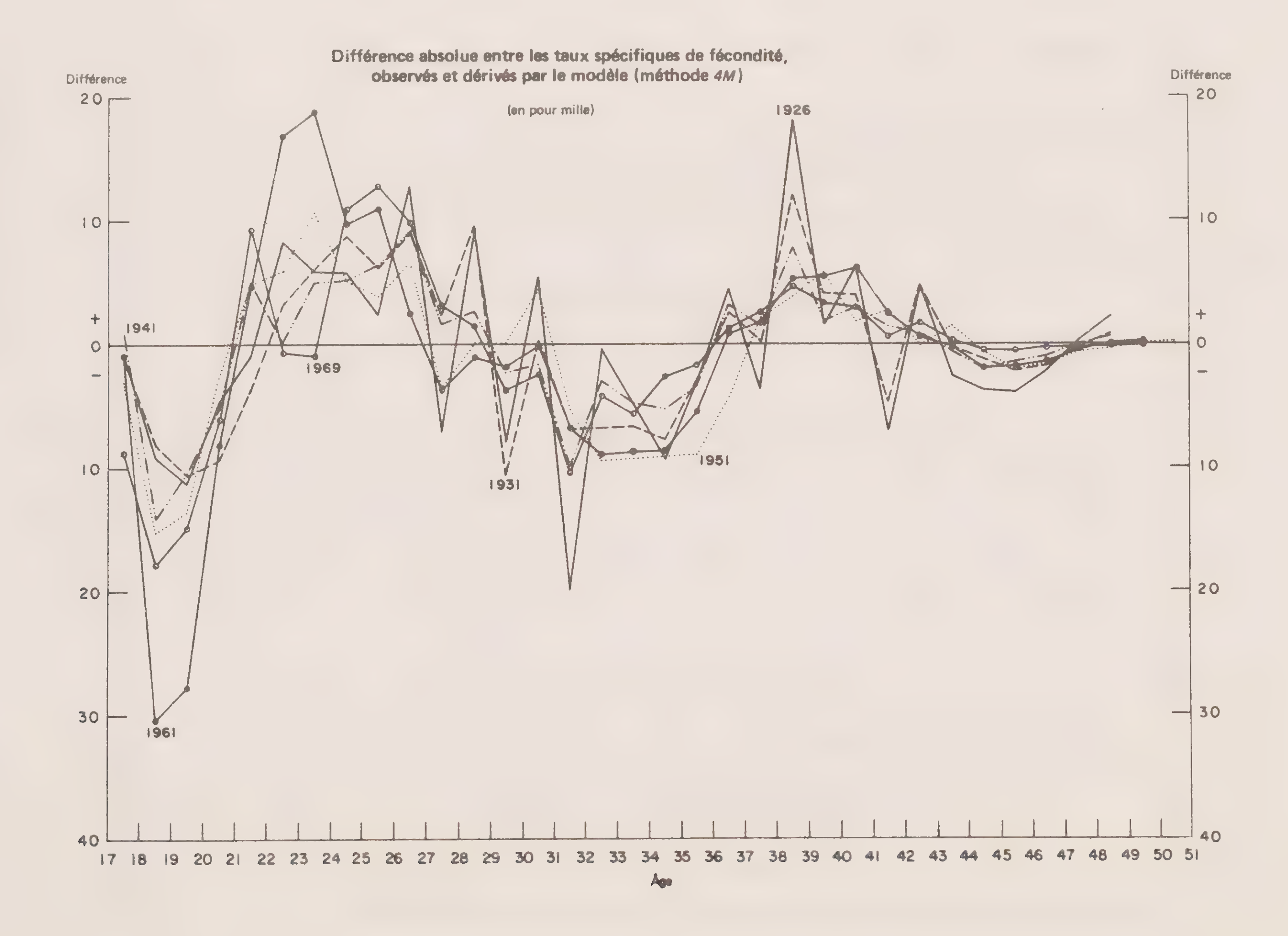

Différence absolue entre les taux spécifiques de fécondité, observés et dérivés par le modèle (méthode 4M)
(en pour mille)
Différence
Différence
Age
1941
1961
1969
1931
1951
1926

TABLEAU ANNEXE-I

Taux de fécondité par âge, en pour mille, observés et dérivés par le modèle selon le procédé indiqué ci-après

- Canada, 1926 -

Age	Taux observés	Taux dérivés				
		(4M)	(2M)		(1M)	
			15-50	17-50	15-50	17-50
15	2.22	-	3.47	-	19.10	-
16	7.82	-	17.25	-	45.62	-
17	20.88	21.77	35.27	17.62	66.81	16.33
18	46.13	55.40	55.07	51.34	84.55	48.46
19	71.68	83.02	75.28	80.26	99.56	77.40
20	101.43	106.13	94.93	104.89	112.24	102.72
21	124.35	125.36	113.36	125.58	122.86	124.35
22	149.47	141.14	130.08	142.57	131.60	142.37
23	159.61	153.77	144.72	156.13	138.63	156.91
24	169.19	163.52	157.06	166.49	144.07	168.13
25	173.06	170.60	166.93	173.88	148.02	176.23
26	188.07	175.21	174.24	178.50	150.58	181.38
27	170.50	177.53	179.00	180.60	151.84	183.82
28	186.87	177.74	181.22	180.36	151.87	183.75
29	168.03	176.00	180.98	178.02	150.76	181.38
30	177.85	172.48	178.41	173.79	148.57	176.96
31	147.42	167.34	173.67	167.82	145.36	170.69
32	160.32	160.73	166.94	160.38	141.21	162.82
33	147.67	152.81	158.43	151.64	136.18	153.56
34	134.39	143.73	148.38	141.83	130.34	143.17
35	130.36	133.67	137.05	131.13	123.76	131.85
36	127.24	122.78	124.71	119.74	116.49	119.83
37	107.52	111.23	111.65	107.88	108.61	107.37
38	117.44	99.20	98.15	95.73	100.19	94.67
39	88.39	86.85	84.51	83.51	91.32	81.95
40	80.72	74.38	71.03	71.39	82.06	69.45
41	54.87	61.98	58.02	59.61	72.51	57.38
42	54.61	49.88	45.76	48.32	62.75	45.95
43	35.68	38.31	34.52	37.75	52.90	35.38
44	23.71	27.52	24.56	28.10	43.09	25.85
45	13.85	17.83	16.11	19.54	33.45	17.58
46	7.32	9.61	9.36	12.29	24.17	10.72
47	3.73	3.37	4.43	6.54	15.48	5.46
48	2.34	0.07	1.38	2.48	7.77	1.92
49	0.76	-	0.11	0.32	1.71	0.20
50						
Taux cumulés	3355.50	3360.96	3356.04	3356.03	3356.03	3355.99

TABLEAU ANNEXE-II

Taux de fécondité par âge, en pour mille, observés et dérivés par le modèle selon le procédé indiqué ci-après

- Canada, 1931 -

Age	Taux observés	Taux dérivés				
		(4M)	*(2M)*		*(1M)*	
			15-50	17-50	15-50	17-50
15	2.50	-	3.78	-	16.73	-
16	8.07	-	17.92	-	42.48	-
17	21.55	22.81	36.18	18.51	63.82	15.12
18	47.29	55.53	56.06	52.42	81.98	46.62
19	72.51	83.04	76.18	81.10	97.46	75.58
20	96.75	106.16	95.56	105.23	110.58	101.09
21	121.50	125.34	113.55	125.22	121.54	122.90
22	144.10	140.91	129.67	141.41	130.53	140.98
23	159.17	153.16	143.59	154.10	137.67	155.44
24	171.09	162.35	155.09	163.54	143.09	166.42
25	174.92	168.69	164.04	170.01	146.89	174.12
26	181.54	172.43	170.39	173.73	149.19	178.74
27	176.21	173.78	174.15	174.96	150.08	180.53
28	182.57	172.94	175.37	173.93	149.65	179.72
29	159.59	170.12	174.18	170.85	147.98	176.57
30	165.76	165.51	170.73	165.96	145.17	171.32
31	152.37	159.32	165.20	159.48	141.30	164.26
32	144.93	151.75	157.80	151.61	136.46	155.62
33	136.30	142.98	148.76	142.58	130.73	145.67
34	125.46	133.21	138.35	132.59	124.19	134.69
35	119.58	122.64	126.83	121.85	116.93	122.91
36	113.95	111.45	114.49	110.57	109.05	110.60
37	100.08	99.84	101.61	98.94	100.63	98.00
38	100.05	87.99	88.49	87.16	91.76	85.35
39	80.16	76.12	75.42	75.44	82.56	72.89
40	68.34	64.40	62.68	63.94	73.11	60.84
41	48.18	53.04	50.56	52.87	63.53	49.40
42	46.96	42.23	39.31	42.40	53.95	38.79
43	31.90	32.18	29.17	32.73	44.48	29.19
44	21.65	23.09	20.35	24.01	35.29	20.77
45	12.93	15.18	13.04	16.42	26.53	13.66
46	6.85	8.66	7.35	10.10	18.40	8.00
47	3.47	3.78	3.33	5.22	11.16	3.85
48	1.56	0.79	0.97	1.89	5.14	1.24
49	0.62	-	0.06	0.21	0.94	0.11
50						
Taux cumulés	3200.46	3201.42	3200.21	3200.98	3200.98	3200.99

TABLEAU ANNEXE-III

Taux de fécondité par âge, en pour mille, observés et dérivés par le modèle selon le procédé indiqué ci-après

- Canada, 1941 -

Age	Taux observés	Taux dérivés				
		(4M)	*(2M)*		*(1M)*	
			15-50	17-50	15-50	17-50
15	1.89	-	3.46	-	11.77	-
16	7.95	-	18.44	-	33.46	-
17	21.13	20.31	37.28	22.88	54.27	8.81
18	45.38	59.50	57.23	58.84	73.29	37.68
19	77.82	88.28	76.83	86.85	90.21	66.79
20	105.28	110.50	95.17	109.05	104.89	93.34
21	132.50	127.58	111.68	126.43	117.28	116.33
22	140.60	140.40	125.94	139.65	127.38	135.37
23	154.48	149.54	137.72	149.20	135.28	150.34
24	160.72	155.49	146.90	155.51	141.03	161.32
25	165.02	158.64	153.45	158.95	144.75	168.50
26	168.34	159.33	157.40	159.86	146.54	172.14
27	159.52	157.86	158.85	158.83	146.54	172.52
28	157.15	154.52	157.93	155.24	144.87	170.00
29	147.17	149.55	158.61	150.26	141.69	164.94
30	141.48	143.19	149.75	143.83	137.13	157.70
31	125.79	135.67	142.92	136.20	131.35	148.64
32	124.17	127.19	134.60	127.59	124.51	138.14
33	114.00	117.96	125.05	118.19	115.90	126.55
34	102.71	108.17	114.53	108.25	108.28	114.23
35	94.51	97.99	103.34	97.92	99.21	101.51
36	90.77	87.61	91.74	87.42	89.73	88.69
37	78.73	77.18	80.00	76.90	80.00	76.07
38	74.61	66.88	68.38	66.54	70.17	63.90
39	58.66	56.85	57.12	56.50	60.42	52.42
40	50.19	47.24	46.48	46.92	50.91	41.83
41	39.64	38.19	36.62	37.94	41.79	32.30
42	30.63	29.84	27.75	29.70	33.22	23.95
43	21.80	22.31	20.02	22.31	25.34	16.86
44	13.63	15.71	13.54	15.86	18.32	11.10
45	8.67	10.16	8.37	10.45	12.27	6.66
46	4.52	5.76	4.52	6.15	7.33	3.49
47	2.41	2.57	1.96	3.00	3.60	1.45
48	1.28	0.65	0.54	0.99	1.18	0.38
49	0.48	0.00	0.04	0.10	0.09	0.02
50						
Taux cumulés	2823.63	2822.62	2824.16	2824.01	2824.00	2823.97

TABLEAU ANNEXE-IV

Taux de fécondité par âge, en pour mille, observés et dérivés par le modèle selon le procédé indiqué ci-après

- Canada, 1951 -

Age	Taux observés	Taux dérivés (4M)	(2M) 15-50	(2M) 17-50	(1M) 15-50	(1M) 17-50
15	3.36	-	6.67	-	32.55	-
16	13.83	-	29.92	-	70.36	-
17	35.89	39.06	57.34	42.39	97.71	40.52
18	72.87	88.17	85.18	92.77	118.84	91.54
19	111.17	124.73	111.52	129.28	135.34	128.15
20	149.82	152.51	135.28	156.50	148.11	155.35
21	178.14	173.26	155.78	176.47	157.73	175.30
22	194.09	188.11	172.64	190.46	164.60	189.30
23	208.54	197.92	185.72	199.42	169.07	198.29
24	208.54	203.37	194.98	204.07	171.42	203.03
25	208.94	205.07	200.52	205.04	171.88	204.12
26	210.11	203.54	202.54	202.87	170.65	202.10
27	195.63	199.23	201.27	198.04	167.91	197.45
28	192.67	192.59	197.02	190.97	163.83	190.57
29	184.06	184.00	190.12	182.05	158.58	181.87
30	178.25	173.83	180.95	171.65	152.28	171.67
31	156.99	162.40	169.87	160.08	145.09	160.32
32	140.61	150.03	157.26	147.65	137.13	148.09
33	127.63	137.01	143.54	134.65	128.52	135.26
34	114.57	123.60	129.05	121.33	119.39	122.10
35	105.58	110.07	114.19	107.93	109.86	108.83
36	98.69	96.63	99.30	94.68	100.04	95.68
37	87.34	83.51	84.72	81.76	90.05	82.82
38	76.63	70.89	70.72	69.37	80.01	70.47
39	60.82	58.96	57.59	57.68	70.01	58.77
40	50.57	47.86	45.57	46.82	60.19	47.88
41	37.57	37.74	34.81	36.92	50.65	37.92
42	30.18	28.71	25.48	28.10	41.53	29.01
43	20.14	20.86	17.67	20.44	32.92	21.22
44	12.05	14.26	11.41	14.01	24.97	14.65
45	7.23	8.95	6.67	8.82	17.80	9.31
46	4.31	4.94	3.35	4.89	11.58	5.24
47	1.78	2.20	1.31	2.20	6.44	2.40
48	0.66	0.62	0.31	0.63	2.61	0.72
49	0.25	0.03	0.01	0.04	0.37	0.05
50						
Taux cumulés	3479.51	3484.66	3480.28	3479.98	3480.02	3480.00

TABLEAU ANNEXE-V

Taux de fécondité par âge, en pour mille, observés et dérivés par le modèle selon le procédé indiqué ci-après

- Canada, 1961 -

Age	Taux observés	Taux dérivés				
		(4M)	(2M)		(1M)	
			15-50	17-50	15-50	17-50
15	5.22	-	9.52	-	51.83	-
16	18.68	-	41.62	-	99.12	-
17	47.60	48.49	77.14	61.06	129.92	72.97
18	92.91	123.29	111.50	125.65	152.04	136.80
19	141.37	169.04	142.66	167.92	168.17	175.62
20	191.60	199.72	169.54	197.04	179.72	201.14
21	224.67	219.93	191.63	216.64	187.57	217.54
22	248.95	232.19	208.73	228.82	192.35	227.12
23	256.92	238.17	220.87	235.02	194.51	231.33
24	248.82	239.10	228.25	236.34	194.45	231.25
25	246.93	235.93	231.17	233.66	192.45	227.70
26	231.87	229.45	230.01	227.68	188.77	221.31
27	216.47	220.31	225.20	219.04	183.64	212.66
28	207.81	209.08	217.11	208.27	177.28	202.20
29	194.28	196.25	206.51	195.84	169.83	190.34
30	181.98	182.24	193.62	182.17	161.50	177.42
31	160.50	167.45	179.03	167.64	152.41	163.77
32	143.27	152.21	163.20	152.57	142.72	149.65
33	128.13	136.81	146.61	137.29	132.56	135.33
34	112.91	121.51	129.67	122.04	122.05	121.02
35	100.93	106.56	112.81	107.07	111.31	106.92
36	92.84	92.16	96.38	92.60	100.48	93.22
37	80.24	78.48	80.70	78.81	89.65	80.09
38	70.93	65.67	66.06	65.86	78.93	67.65
39	59.26	53.85	52.69	53.89	68.45	56.03
40	49.40	43.14	40.76	43.01	58.29	45.35
41	36.09	33.60	30.40	33.31	48.59	35.71
42	25.87	25.28	21.66	24.87	39.42	27.16
43	17.95	18.22	14.58	17.71	30.90	19.78
44	10.39	12.41	9.10	11.84	23.16	13.58
45	5.95	7.83	5.11	7.26	16.28	8.60
46	2.90	4.42	2.45	3.90	10.42	4.82
47	1.60	2.09	0.90	1.68	5.68	2.20
48	0.70	0.72	0.20	0.46	2.24	0.67
49	0.24	0.11	0.01	0.03	0.30	0.05
50						
Taux cumulés	3856.17	3865.71	3857.40	3856.99	3856.99	3857.00

TABLEAU ANNEXE-VI

Taux de fécondité par âge, en pour mille, observés et dérivés par le modèle selon le procédé indiqué ci-après

- Canada, 1969 -

Age	Taux observés	Taux dérivés				
		(4M)	*(2M)*		*(1M)*	
			15-50	17-50	15-50	17-50
15	4.99	-	7.17	-	27.36	-
16	15.64	-	29.47	-	59.01	-
17	36.21	44.92	53.88	45.48	81.27	41.48
18	64.63	82.48	77.17	88.61	97.82	85.58
19	95.61	110.57	97.92	116.05	110.12	113.96
20	124.76	130.90	115.40	134.23	119.00	132.98
21	153.97	144.75	129.31	145.77	125.01	145.22
22	152.37	153.13	139.57	152.20	128.62	152.21
23	155.92	156.95	146.28	154.59	130.14	155.04
24	167.86	156.98	149.65	153.76	129.88	154.52
25	166.73	153.91	149.95	150.34	128.08	151.31
26	158.14	148.36	147.52	144.85	124.95	145.96
27	144.05	140.88	142.72	137.76	120.73	138.92
28	133.44	131.95	135.94	129.44	115.55	130.59
29	118.06	122.00	127.53	120.23	109.61	121.33
30	108.86	111.40	117.90	110.43	103.03	111.43
31	90.00	100.49	107.38	100.28	95.98	101.17
32	85.18	89.53	96.35	90.01	88.57	90.79
33	73.08	78.76	85.09	79.82	80.93	80.44
34	65.73	68.39	73.91	69.86	73.19	70.35
35	56.82	58.57	63.05	60.29	65.43	60.66
36	50.75	49.42	52.74	51.23	57.76	51.48
37	43.63	41.03	43.17	42.78	50.29	42.93
38	38.01	33.47	34.47	35.03	43.09	35.10
39	30.05	26.77	26.75	28.02	36.24	28.03
40	23.90	20.93	20.08	21.82	29.82	21.78
41	16.47	15.96	14.47	16.44	23.92	16.38
42	13.55	11.81	9.92	11.90	18.56	11.82
43	8.62	8.43	6.39	8.18	13.82	8.10
44	5.17	5.77	3.78	5.25	9.74	5.18
45	3.11	3.74	1.99	3.06	6.36	3.01
46	1.91	2.27	0.88	1.57	3.71	1.52
47	0.89	1.26	0.29	0.61	1.78	0.60
48	0.40	0.61	0.05	0.15	0.57	0.14
49	0.07	0.25	0.01	0.01	0.05	0.01
50						
Taux cumulés	2408.58	2406.64	2408.15	2410.02	2409.99	2410.02

RÉSUMÉ

Cet article vise à montrer qu'il est possible de réduire le nombre des moments dont dépend la fonction mathématique du type I de Pearson. La première partie de l'article s'attache précisément à démontrer comment cela peut se faire. La deuxième s'applique à tester les différents procédés utilisés dans la dérivation des paramètres de base nécessaires pour calculer la courbe en question. On a utilisé les données sur la fécondité au Canada pour effectuer ces tests.

RÉFÉRENCES

[1] Avery, Roger C.(1970) Graduation of age-specific fertility rates. *Third Conference on the Mathematics of Population,* Chicago.(Mimeograph).

[2] Elderton, W.P.(1930). *Frequency Curves and Correlations.* Cambridge University Press.

[3] Keyfitz, N.(1968). *Introduction to the Mathematics of Population.* Addison-Wesley, Reading Massachussets.

[4] Martin, Peter.(1967). Une application des fonctions de Gompertz à l'étude de la fécondité d'une cohorte. *Population,* 22, 1085-1096.

[5] Mazur, Peter D.(1963). A demographic model for estimating age order specific fertility rates. *J. Amer.Statist. Assoc.,* 58, 774-788.

[6] Mitra, S.(1967). The pattern of age-specific fertility rates. *Demography,* 4 , No. 2, 894-906.

[7] Murphy, E.M. and Nagnur, D.N.(1972). A Gompertz fit that fits: Application to Canadian fertility patterns. *Demography,* 9, No.1, 35-50.

[8] Romaniuk, A. and Tanny, S.(1969). *Projection of Incomplete Cohort Fertility for Canada by means of the Gompertz Function. Analytical and Technical Memorandum, No. 1.* Statistics Canada, Ottawa.

[9] Romaniuk, A.(1973). A three parameter model for birth projections. *Population Studies* (to appear).

[10] Stone, Leroy O.(1973). *Use of Gompertz Probability Distribution in the Context of Projections and Simulations.* Statistics Canada, Ottawa.

[11] Tekse, K.(1967). On demographic models of age-specific fertility rates. *Statistical Review III,* 5,No.3, *Statistisk Tidskrift (Stockholm),* 189-207.

[12] Wicksell, S.D.(1931). Nuptiality, fertility and reproductivity. *Skandinavisk Aktuarietidskrift,* 125-157.

[13] Wunsch, Guillaume.(1966). Courbe de Gompertz et perspective de fécondité. *Recherches Economiques de Louvain,* No.6, September 1966, 457-468.

Received 18 April 1973
Revised 11 July 1973

Professor S. Mitra
Department of Sociology & Anthropology
Emory University, Atlanta
Georgia 30322
U.S.A

and

Dr. A. Romaniuk
Statistics Canada
Census Field, Room 2118
Ottawa, Ontario K1A 0T7
CANADA

CENSUS FIELD PAPERS AND MEMORANDA ISSUED

Reprinted Publications (since 1965)

Census Technical Papers (1965-1968)

Technical Memoranda (1965-1968)

Analytical and Technical Memoranda (since 1969)

Lists of papers published in above series are available from:

Technical Officer
Characteristics Division
Census Field
Statistics Canada
Ottawa, Ontario
K1A 0T7